广义微扰法

梁昌洪, 曹祥玉
(西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 本文针对目前电磁理论微扰法处理中的某些不足, 提出微扰量、不变量和逐级处理这三个概念. 以介质微扰为例, 得到了精度更高的谐振腔和波导的二级微扰结果.

关键词: 广义微扰法; 微扰量; 不变量; 逐级处理
中图分类号: O441. 4 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2003) 12A-1994-04

Generalized Perturbation Method

LIANG Chang-hong, CAO Xiang-yu
(School of Electronics Engineering, Xidian University, Xi' an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: According to some disadvantages in the disposal process of the perturbation method, the concepts of perturbation quantity, constant quantity and stepwise disposal have been introduced. For the case of dielectric waveguide, we have obtained the more accurate two orders perturbation results of resonant cavity and waveguide.

Key words: generalized perturbation method; perturbation quantity; constant quantity; stepwise disposal

1 引言

微扰法是电磁理论中经常运用的一种方法, 其处理思想是把它归结为两个问题: 未受扰问题(原问题)和微扰问题. 而要计算的特征量(G)的变化 ΔG, 应用原问题的知识加以求解, 其处理框图如图 1 所示.

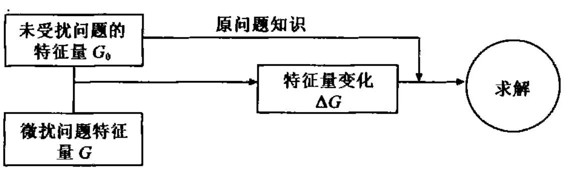


图 1 微扰法框图

但是, 值得注意目前的文献[1,2]在概念上存在某些不足: 首先, 在微扰上强调发生微扰的原因, 如体积微扰, 介质微扰, 腔壁微扰等等, 而忽略了特征量微扰这一本质或关键; 其次在求解上强调用原问题的知识, 而忽略了应用微扰问题知识; 最后, 对于微扰的等级不够清楚, 没有提出不变量.

针对所存在的上述问题, 本文归结出三个重要的概念:

(1) 微扰量. "微扰" 这术语意味着扰动或微小的改变[1], 尽管其起因可能是介质、体积变化所造成的, 但是, 我们所谓微小变化的"微扰量" – 指的是特征量, ΔG 变化是微扰量. 换句话说, 例如介电微扰它可以 ΔV(体积变化量)小而 $\Delta\varepsilon$(介质常数变化量)大, 或者 $\Delta\varepsilon$ 小而 ΔV 大.

(2) 不变量. 电磁理论中的微扰法是以 Maxwell 方程组作为基础的, 因此我们不仅要研究微扰量, 而且要确定不变量– 也即在未受扰原问题和微绕问题中什么是共同的不变量. 本文指出: 在谐振腔问题中, 谐振波长 λ_0 不变量; 而在波导传输中, 传输频率 ω_0 是不变量.

(3) 逐级处理. 本文将奇异扰动法中逐级处理的思想[3]运用到电磁理论的微扰法, 以介质微扰为例导出更为精确的谐振腔和波导的二级微扰公式.

2 谐振腔材料扰动

本文将谐振腔材料扰动作为典型例子进行处理. 问题的模型如图 2 所示. 其中, 微扰量是谐振频率的变化量 $\Delta\omega=\omega-\omega_0$, 它可能是由腔的局部体积或全部体积的材料参数变化 $\Delta\varepsilon$, $\Delta\mu$ 造成的.

写出未受扰和微扰问题的 Maxwell 方程

$$\begin{cases} -\nabla\times \boldsymbol{E}_0 = j\omega_0\mu \boldsymbol{H}_0 \\ \nabla\times \boldsymbol{H}_0 = j\omega_0\varepsilon \boldsymbol{E}_0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -\nabla\times \boldsymbol{E} = j\omega(\mu+\Delta\mu)\boldsymbol{H} \\ \nabla\times \boldsymbol{H} = j\omega(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\boldsymbol{E} \end{cases} \tag{1}$$

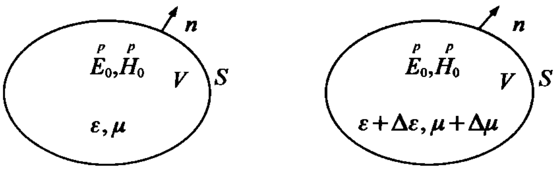
作为例子, 这里研究体积 ΔV 很大而 $\Delta\varepsilon$、$\Delta\mu$ 是 ω 的一级小量, 即

$$\Delta\mu=\mu_1\Delta\omega, \qquad \Delta\varepsilon=\varepsilon_1\Delta\omega \tag{2}$$

将场作级数展开, 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1\Delta\omega+\boldsymbol{E}_2\Delta\omega^2+\cdots \\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1\Delta\omega+\boldsymbol{H}_2\Delta\omega^2+\cdots \\ \omega=\omega_0+\Delta\omega+\Delta\omega^2+\cdots \end{cases} \tag{3}$$

收稿日期: 2003-09-10; 修回日期: 2003-12-25



(a) 未受扰原问题　　(b) 微扰问题

图 2　谐振腔内的材料微扰

我们把式(2)、(3)代入式(1), 得到

$$
\begin{aligned}
&-\nabla\times(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_1\Delta\omega+\mathbf{E}_2\Delta\omega^2+\cdots)\\
&\quad= j(\omega_0+\Delta\omega+\Delta\omega^2+\cdots)(\mu+\mu_1\Delta\omega)\\
&\qquad\times(\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_1\Delta\omega+\mathbf{H}_2\Delta\omega^2+\cdots)
\end{aligned}\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times(\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_1\Delta\omega+\mathbf{H}_2\Delta\omega^2+\cdots)\\
&\quad= j(\omega_0+\Delta\omega+\Delta\omega^2+\cdots)(\varepsilon+\varepsilon_1\Delta\omega)\\
&\qquad\times(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_1\Delta\omega+\mathbf{E}_2\Delta\omega^2+\cdots)
\end{aligned}\tag{5}
$$

Taylor 级数展开的完备性可写出式(4)和式(5)的各级方程:

$$
0\ 级\quad \begin{cases}-\nabla\times\mathbf{E}_0=j\omega_0\mu\mathbf{H}_0\\ \nabla\times\mathbf{H}_0=j\omega_0\varepsilon\mathbf{E}_0\end{cases}\tag{6}
$$

$$
1\ 级\quad \begin{cases}-\nabla\times\mathbf{E}_1=j(\omega_0\mu\mathbf{H}_1+\omega_0\mu_1\mathbf{H}_0+\mu\mathbf{H}_0\\ \nabla\times\mathbf{H}_1=j(\omega_0\varepsilon\mathbf{E}_1+\omega_0\varepsilon_1\mathbf{E}_0+\varepsilon\mathbf{E}_0\end{cases}\tag{7}
$$

$$
2\ 级\quad \begin{cases}-\nabla\times\mathbf{E}_2=j(\omega_0\mu\mathbf{H}_2+\omega_0\mu_1\mathbf{H}_1+\mu_1\mathbf{H}_0\mu\mathbf{H}_0\\ \nabla\times\mathbf{H}_2=j(\omega_0\varepsilon\mathbf{E}_2+\omega_0\varepsilon_1\mathbf{E}_1+\varepsilon_1\mathbf{E}_0\varepsilon\mathbf{E}_0\end{cases}\tag{8}
$$

式(6)、(7)、(8) …即逐级展开的广义微扰法方程.

Case 1: 1 级微扰

让我们重新写出 1 级方程

$$
\begin{cases}-\nabla\times\mathbf{E}_1\Delta\omega=j\omega_0\mu\mathbf{H}_1\Delta\omega+\mathbf{M}_0\\ \nabla\times\mathbf{H}_1\Delta\omega=j\omega_0\varepsilon\mathbf{E}_1\Delta\omega+\mathbf{J}_0\end{cases}\tag{9}
$$

其中 $\mathbf{M}_0$ 和 $\mathbf{J}_0$ 分别为 0 级磁流和 0 级电流, 有

$$
\begin{cases}\mathbf{M}_0=j(\omega_0\mu_1\mathbf{H}_0+\mu\mathbf{H}_0)\Delta\omega\\ \mathbf{J}_0=j(\omega_0\varepsilon_1\mathbf{E}_0+\varepsilon\mathbf{E}_0)\Delta\omega\end{cases}\tag{10}
$$

式(9)结合 0 级方程可知在 1 级微扰条件下为

$$
\begin{cases}-\nabla\times\mathbf{E}=j\omega_0\mu\mathbf{H}+\mathbf{M}_0\\ \nabla\times\mathbf{H}=j\omega_0\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{J}_0\end{cases}\tag{11}
$$

类似常规处理得到

$$
\nabla\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{E}_0^*+\mathbf{H}_0^*\times\mathbf{E})=\mathbf{J}_0\cdot\mathbf{E}_0^*+\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{H}_0^*\tag{12}
$$

两边作谐振腔体积分, 计及边界条件

$$
\begin{cases}\hat{n}\times\mathbf{E}_0=0,\\ \hat{n}\times\mathbf{E}=0,\end{cases}\qquad 在\ S\ 上\tag{13}
$$

具体为

$$
\iiint_V \mathbf{J}_0\cdot\mathbf{E}_0^*+\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{H}_0^*)\,dv=0\tag{14}
$$

考虑到式(10), 即可得到

$$
\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{\iiint_V\Delta\mu\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0^*+\Delta\varepsilon\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv}{\iiint_V\mu\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0^*+\varepsilon\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv}\tag{15}
$$

式(15)即一般文献[1]给出的微扰结果, 也即一阶微扰.

Case 2: 2 级微扰

现在来研究 2 级微扰情况, 很易写出:

$$
\begin{cases}\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_1\Delta\omega+\mathbf{E}_2\Delta\omega^2\\ \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_1\Delta\omega+\mathbf{H}_2\Delta\omega^2\end{cases}\tag{16}
$$

所对应的 2 级微扰 Maxwell 方程

$$
\begin{cases}-\nabla\times\mathbf{E}=j\omega_0\mu\mathbf{H}+\mathbf{M}_1\\ \nabla\times\mathbf{H}=j\omega_0\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{J}_1\end{cases}\tag{17}
$$

其中, $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{J}_1$ 分别为 1 级磁流和 1 级电流, 有

$$
\begin{cases}\mathbf{M}_1=j\left\{(\omega_0\mu_1+\mu)\mathbf{H}_0\Delta\omega+(\mu_1+\mu)\mathbf{H}_0\Delta\omega^2+\omega_0\mu_1\mathbf{H}_1\Delta\omega^2\right\}\\ \mathbf{J}_1=j\left\{(\omega_0\varepsilon_1+\varepsilon)\mathbf{E}_0\Delta\omega+(\varepsilon_1+\varepsilon)\mathbf{E}_0\Delta\omega^2+\omega_0\varepsilon_1\mathbf{E}_1\Delta\omega^2\right\}\end{cases}\tag{18}
$$

同样, 按常规处理易得

$$
\nabla\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{E}_0^*+\mathbf{H}_0^*\times\mathbf{E})=\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_0^*+\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_0^*\tag{19}
$$

对上式两边作体积分, 并考虑到边界条件有

$$
\iiint_V\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_0^*+\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_0^*)\,dv=0\tag{20}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
&(1+\Delta\omega)\iiint_V\mu\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0^*+\varepsilon\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv\\
&=-\omega_0\left\{\begin{aligned}&(1+\Delta\omega/\omega)\iiint_V\mu_1\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0^*+\varepsilon_1\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv\\ &\Delta\omega\iiint_V\mu_1\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_0^*+\varepsilon_1\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\tag{21}
$$

最后导出结果:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Delta\omega+\Delta\omega^2}{\omega_0}\\
&=-\frac{\left\{\begin{aligned}&(1+\Delta\omega/\omega_0)\iiint_V\Delta\mu\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0^*+\Delta\varepsilon\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv\\ &+\Delta\omega\iiint_V\Delta\mu\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_0^*+\Delta\varepsilon\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv\end{aligned}\right\}}{\iiint_V\mu\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0^*+\varepsilon\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*)\,dv}
\end{aligned}\tag{22}
$$

式(22)便是我们要求的 2 级微扰公式, 与 1 级微扰式(15)相比, 为了得到有应用价值的结果, 它需要提供微扰后的场 $\mathbf{E}_1$ 与 $\mathbf{H}_1$ 的信息.

作为实例, 我们来研究整个腔电介质材料微扰 $\varepsilon+\Delta\varepsilon$ 的情况, 这是 $\Delta\mu=0$, 且有精确结果, 即

$$
\omega=\omega_0\backslash\sqrt{1+\Delta\varepsilon/\varepsilon}\tag{23}
$$

假设 $\mathbf{E}_1=k_1\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_1=k_2\mathbf{H}_0$, 代入 1 级方程(7)得到

$$
\begin{cases}k_1-k_2=\mu_1/\mu+1/\omega_0\\ k_1-k_2=-\varepsilon_1/\varepsilon-1/\omega_0\end{cases}\tag{24}
$$

或者

$$
k_1-k_2=\frac{1}{2}(\mu_1/\mu-\varepsilon_1/\varepsilon)\tag{25}
$$

作为合理的假设, 可认为

$$
\begin{cases}k_1\Delta\omega=-\Delta\varepsilon/(2\varepsilon)\\ k_2\Delta\omega=-\Delta\mu/(2\mu)\end{cases}\tag{26}
$$

把式(26)的结果代入式(22)得到全腔电介质微扰时

$$
1\ 级微扰\quad \Delta\omega/\omega_0=-\Delta\varepsilon/(2\varepsilon)\tag{27}
$$

2 级微扰　$$\frac{\Delta\omega(1+\Delta\omega)}{\omega_0} = -\frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \tag{28}$$

精确结果　$$\frac{\Delta\omega(1+\Delta\omega+\cdots)}{\omega_0} = -\frac{1}{\sqrt{1+(\Delta\varepsilon/\varepsilon)}} = -1 \tag{29}$$

数据由表 1 给出, 曲线如图 3 所示.

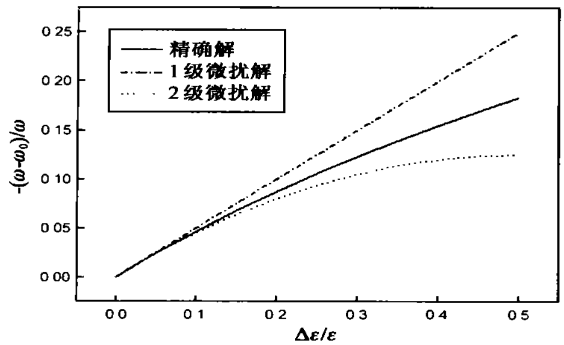


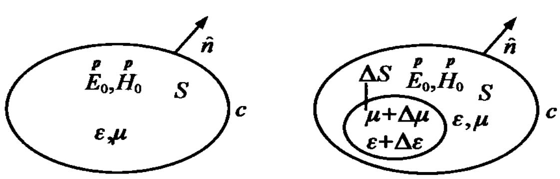
图 3　全腔电介质材料微扰分析

表 1　全腔电介质微扰的谐振频率分析

Δε/ε	1 级微扰公式	2 级微扰公式	精确解公式
0.10	－0.050	－0.045	－0.0465
0.20	－0.100	－0.080	－0.0871
0.30	－0.150	－0.105	－0.123
0.40	－0.200	－0.120	－0.155
0.50	－0.250	－0.125	－0.184

3　波导材料微扰

为了讨论各种情况, 我们把波导材料微扰定位在很小的 ΔS 内发生材料变化 $\Delta\varepsilon$, 微扰量是 $\Delta\beta$(波导传输常数变化). 因此, 在 ΔS 内材料参数的变化 $\Delta\varepsilon$ 不一定很小, 而场的变化也不必是一阶小量, 其模型如图 4 所示, 同样注意到这类问题的不变量是波的传输频率 ω_0.



(a)波导未受扰原问题　　(b)微扰问题

图 4　波导材料微扰问题

由文献[1]已经导出

$$(\beta-\beta_0)\iint_S\left(\tilde{E}_0^*\times\tilde{H}+\tilde{E}\times\tilde{H}_0^*\right)\cdot\hat{a}_z ds = \omega_0\iint_S\left(\Delta\varepsilon\tilde{E}\cdot\tilde{E}_0^*+\Delta\mu\tilde{H}\cdot\tilde{H}_0^*\right)ds \tag{30}$$

其中已设

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_0=\tilde{E}_0(x,y)e^{-j\beta_0 z}\\ \boldsymbol{H}_0=\tilde{H}_0(x,y)e^{-j\beta_0 z}\\ \boldsymbol{E}=\tilde{E}(x,y)e^{-j\beta z}\\ \boldsymbol{H}=\tilde{H}(x,y)e^{-j\beta z}\end{cases} \tag{31}$$

我们同样采用逐级微扰的广义微扰思想, 令

$$\beta-\beta_0=\Delta\beta+\Delta\beta^2+\cdots \tag{32}$$

$$\Delta S = S_1\Delta\beta \tag{33}$$

为一阶小量, 对于场的最合理假设是

$$\tilde{E}=\begin{cases}A_1\tilde{E}_0, & 在\ \Delta S\ 内\\ \tilde{E}_0, & 在\ \Delta S\ 外\end{cases} \tag{34}$$

$$\tilde{H}=\begin{cases}A_2\tilde{H}_0, & 在\ \Delta S\ 内\\ \tilde{H}_0, & 在\ \Delta S\ 外\end{cases} \tag{35}$$

于是波导材料的 1 级微扰公式为

$$\Delta\beta=\omega_0\frac{\iint_{\Delta S}(A_1\Delta\varepsilon\tilde{E}_0\cdot\tilde{E}_0^*+A_2\Delta\mu\tilde{H}_0\cdot\tilde{H}_0^*)ds}{\iint_S(\tilde{E}_0^*\cdot\tilde{H}_0+\tilde{E}_0\cdot\tilde{H}_0^*)ds} \tag{36}$$

也即一般微扰法给出的结果[1], 而 2 级微扰公式则为

$$\Delta\beta+\Delta\beta^2=\omega_0\frac{\iint_{\Delta S}(A_1\Delta\varepsilon\tilde{E}_0^*+A_2\Delta\mu\tilde{H}_0)ds}{\iint_S Q\hat{a}_z dS-\iint_{\Delta S}H_c\hat{a}_z ds} \tag{37}$$

式(37)中, $Q=(\tilde{E}_0^*\cdot\tilde{H}_0+\tilde{E}_0\cdot\tilde{H}_0^*)$

$$H_c=[(1-A_2)(\tilde{E}_0^*\times\tilde{H}_0)+(1-A_1)(\tilde{E}_0\times\tilde{H}_0^*)]$$

作为实例之一, 我们研究如图 5 所示的 TE_{10}波矩形波导部分填充情况.

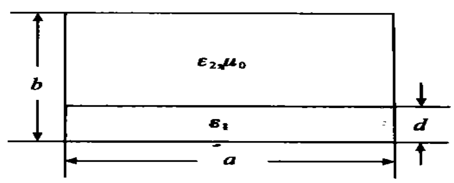


图 5　矩形波导部分填充情况

已经知道: 1 级微扰公式是[1]

$$\beta=\beta_0+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(\frac{k_1^2-k_2^2}{2\beta_0}\right)\left(\frac{d}{b}\right) \tag{38}$$

其中, k_1 和 k_2 分别是 $k_1=\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$, $k_2=\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$ 考虑到电介质微扰等价于 $\Delta\mu=0$, $A_2=0$. 由式(37)不难导出

$$\beta=\beta_0+\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(\frac{k_1^2-k_2^2}{2\beta_0}\right)\left(\frac{d}{b}\right)}{1-(1-\varepsilon_2/\varepsilon_1)(d/b)} \tag{39}$$

式(39)即该问题的 2 级微扰结果, 注意到分析时已用到[1]

$$A_1=\varepsilon_0/\varepsilon_1 \tag{40}$$

另一个重要的实例是圆波导传输 TE_{11}模, 中心半径为 a 的小区域有介质微扰, 见图 6.

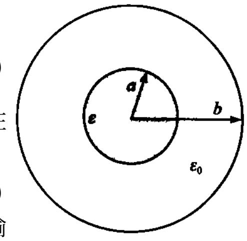


图 6　圆波导(TE_{11}模)部分填充情况

已经知道[1] 1 级微扰公式是

$$\frac{\Delta\beta}{k_0}=\frac{2.1472}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega_0)^2}}\left(\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2 \tag{41}$$

其中, ω_c 为 TE_{11}模截止频率, 上式中已经用到

$$A_1=1/(1+\varepsilon_r) \tag{42}$$

而应用式(37) 很易获得 2 级微扰公式

$$\frac{\Delta\beta+\Delta\beta^2}{k_0}=\frac{2.1472}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega_0)^2}}\left(\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2 \times\left(\frac{1}{1-4.2946\left[\frac{1}{\varepsilon_r+1}-\frac{1}{(\varepsilon_r+1)^2}\right]\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right) \tag{43}$$

上述两个例子可以看出: 微扰量正比于 $\Delta s/s$(具体分别是 d/b 和$(a/b)^2$).

4　结论

本文明确提出微扰量、不变量和逐级处理这些广义微扰法的思想, 并且以谐振腔和波导的材料微扰为例作了深入的讨论, 应该指出上述概念完全可以推广到体积微扰、腔壁微扰及有耗情况, 值得进一步研究.

参考文献:

[1] 哈林登. 正弦电磁场[M]. 上海: 上海科学出版社, 1964.

[2] 哈林登. 矩量法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1980.

[3] 黄用宾, 等. 摄动法简明教程[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1986.

作者简介:

梁昌洪　男, 1943 年 12 月生于上海, 现为西安电子科技大学教授, 博士生导师, 并任中国电子学会微波学会副主任委员、中国电子学会会士、IEEE Senior member 等职. 2003 年荣获首届全国教学名师奖. 研究方向包括计算场论、计算微波、微波网络理论、电磁散射与逆散射和电磁兼容等方面.

曹祥玉　女, 1964 年出生于陕西西安, 教授, 博士, 曾获国家科技进步三等奖, 现在西安电子科技大学电磁场与微波技术专业博士后流动站, 研究方向: 电磁场数值计算, 电磁兼容, 电磁散射与逆散射.